„angeregte Schwingung eines gedämpften Systems“ und Komplexe Zahlen

Von Alexander Mick, Mai 2015

Diese Unterlagen sind ausschließlich zu Unterrichtszwecken zu verwenden.
Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, ist nicht gestattet!

Komplexe Zahlen in der Gauß‘schen Zahlenebene

Es gilt : $i^2 = -1$

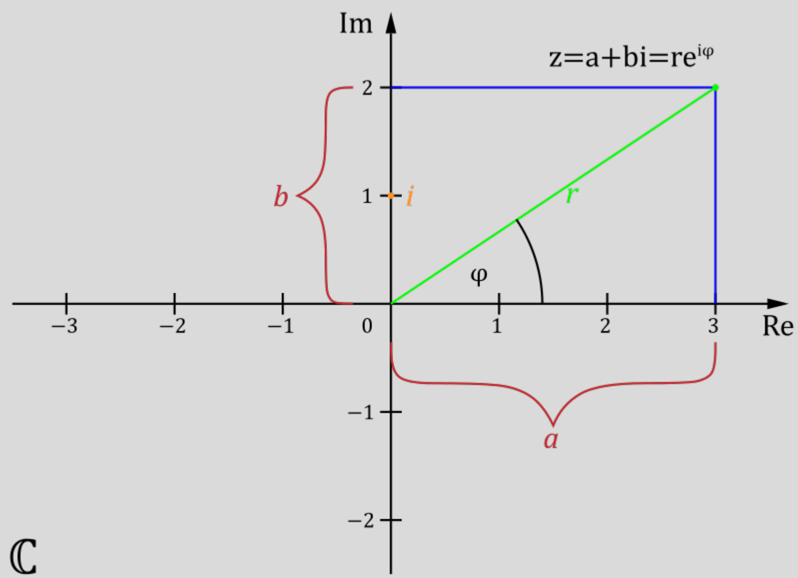
Eine Komplexe Zahl z besteht aus einem Realteil Re(z) und einem Imaginärteil Im(z) :

$$z = Re(z) + i * Im(z) = a + bi$$

Eine Möglichkeit, die komplexe Zahl als Vektor darzustellen ist die Verwendung der Gaußsche Zahlenebene, bei der der Realteil auf der Abzisse, der Imaginärteil auf der Ordinate dargestellt wird.
Somit lässt sich die Zahl z auch in Polarkoordinaten unter Verwendung des Winkels φ und des Betrages $|z| = r$ darstellen:

$$a = \cos(\varphi) * r$$
$$b = \sin(\varphi) * r$$

$$\Rightarrow z = \cos(\varphi) * r + i * \sin(\varphi) * r = r * (\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi))$$



Unter Verwendung der Euler‘schen Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$$

Ergibt sich: $\boldsymbol{z = r * e^{i\varphi}}$

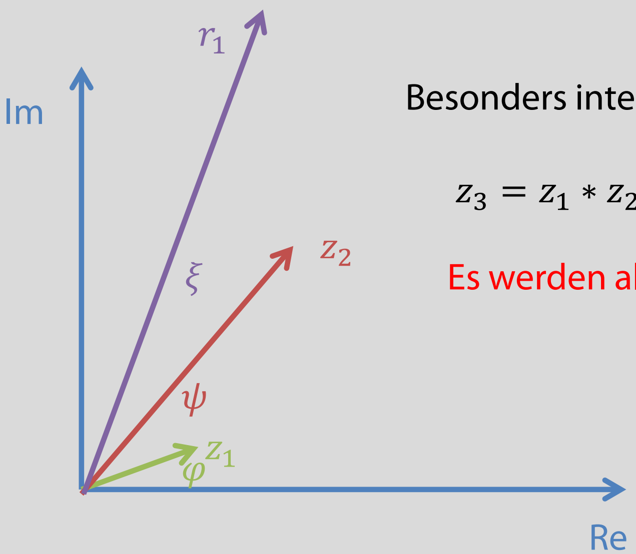
Multiplikation von komplexen Zahlen

Es sollen die beiden Komplexen Zahlen multipliziert werden

$$z_1 = a_1 + b_1 * i = r_1 * e^{i\varphi}$$

$$z_2 = a_2 + b_2 * i = r_2 * e^{i\psi}$$

$$z_1 * z_2 = (a_1 + b_1 * i) * (a_2 + b_2 * i) = a_1 b_1 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 b_1 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$$



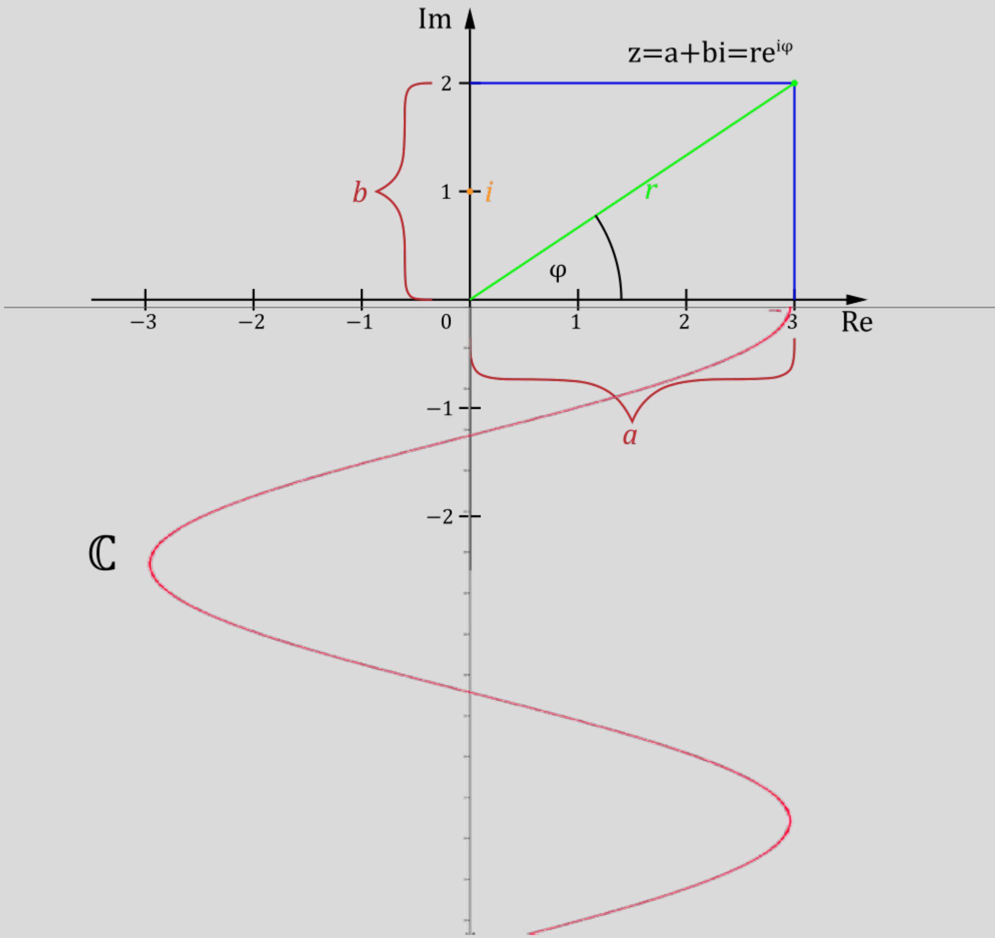
Besonders interessant ist hierbei die Verwendung der Gauß'schen Zahlenebene:

$$z_3 = z_1 * z_2 = r_1 * e^{i\varphi} * r_2 * e^{i\psi} = (r_1 * r_2) e^{i\varphi} e^{i\psi} = (r_1 * r_2) e^{i(\varphi + \psi)} = r_3 * e^{i\xi}$$

Es werden also beim Multiplizieren die Winkel addiert und die Beträge multipliziert !!

Beschreibung einer harmonischen Schwingung durch komplexe Zahlen

- Die Elogation einer harmonischen Schwingung kann mithilfe der komplexen Zahl $z(t) = |z| * e^{i*\omega t}$ beschrieben werden. Dabei wird die Elogation als physikalisch messbare Größe nur durch den Realteil Re(z) beschrieben. Ähnlich wie im Zeigermodell kann der Realteil als vertikale Projektion des drehenden Vektors z betrachtet werden. Selbstredend gibt der Winkel $\varphi = \omega t$ den Phasenwinkel und der Betrag $|z|$ der komplexen Zahl die maximale Elogation an.



Angeregtes gedämpftes System

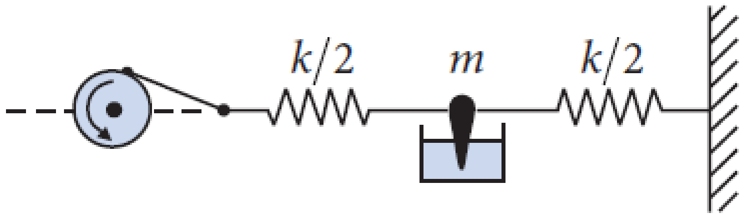


Abb. 2.31. Mechanische Realisierung des gedämpften harmonischen Oszillators unter dem Einfluss einer äußeren Kraft

Es soll ein gedämpftes Schwingungssystem, das durch eine äußere Kraft periodisch angeregt wird durch
Eine Rechnung mit komplexen Zahlen betrachtet werden. Die hier vorgestellten Rechnungen sind hauptsächlich
Dem Buch „klassische Mechanik" von Prof. Nolting entnommen Die Nummerierung der Formeln in dieser Präsentation
richten sich nach den Nummerierungen im Buch von Prof. Nolting !!

Angeregtes gedämpftes System

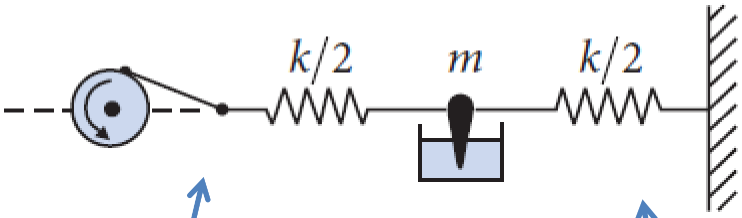


Abb. 2.31. Mechanische Realisierung des gedämpften harmonischen Oszillators unter dem Einfluss einer äußeren Kraft

Reibung:

$$F_{Reibung} = \alpha * \dot{z}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2m}$$

Anregende Kraft:

$$F_{Anregung} = f * e^{i\bar{\omega}t}$$

Charakterisierung der Eigenfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Kräftegleichgewicht:

$$m\ddot{z} + \alpha * \dot{z} + k * z = f * e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{2\alpha}{2m} * \dot{z} + \frac{k}{m} * z = \frac{f}{m} * e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + 2\beta * \dot{z} + {\omega_0}^2 * z = \frac{f}{m} * e^{i\bar{\omega}t}$$

Lösen der DGL

Folgende Differentialgleichung muss gelöst werden:

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + 2\beta * \dot{z} + {\omega_0}^2 * z = \frac{f}{m} * e^{i\overline{\omega}t} \qquad (2.189)$$

Da das angeregte System nach einer Einschwingzeit dem anregenden Kraft folgen wird, liegt folgender Ansatz nahe:

$$z(t) = A * e^{i\overline{\omega}t}$$
$$\dot{z}(t) = A * i\overline{\omega}e^{i\overline{\omega}t}$$
$$\ddot{z}(t) = A * i^2\overline{\omega}^2 e^{i\overline{\omega}t} = A * (-1)\overline{\omega}^2 e^{i\overline{\omega}t} = -A * \overline{\omega}^2 e^{i\overline{\omega}t}$$

A ist komplex !!

Werden die Funktionen in die Gleichung (2.189) eingesetzt, ergibt sich:

$$-A * \overline{\omega}^2 e^{i\overline{\omega}t} + 2\beta\left(A * i\overline{\omega}e^{i\overline{\omega}t}\right) + {\omega_0}^2 * A * e^{i\overline{\omega}t} = \frac{f}{m} * e^{i\overline{\omega}t}$$

$$\Leftrightarrow [A(-\overline{\omega}^2 + 2\beta i\overline{\omega} + {\omega_0}^2)]e^{i\overline{\omega}t} = \frac{f}{m} * e^{i\overline{\omega}t}$$

$$\left[A(-\overline{\omega}^2 + 2\beta i\overline{\omega} + {\omega_0}^2) - \frac{f}{m}\right]e^{i\overline{\omega}t} = 0$$

Da $e^{i\overline{\omega}t} \neq 0$ muss gelten:

$$A(-\overline{\omega}^2 + 2\beta i\overline{\omega} + {\omega_0}^2) - \frac{f}{m} = 0$$

Lösen der DGL (ii)

Da $e^{i\overline{\omega}t} \neq 0$ muss gelten:

$$A(-\overline{\omega}^2 + 2\beta i\overline{\omega} + {\omega_0}^2) - \frac{f}{m} = 0$$

$$A = \frac{f}{m} * \frac{1}{(-\overline{\omega}^2 + 2\beta i\overline{\omega} + {\omega_0}^2)} = -\frac{f}{m} * \frac{1}{(\overline{\omega}^2 - 2\beta i\overline{\omega} - {\omega_0}^2)} = -\frac{f}{m} * \frac{1}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) - 2\beta i\overline{\omega}} = -\frac{f}{m} * \frac{1}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) - 2\beta i\overline{\omega}} * \frac{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) + 2\beta i\overline{\omega}}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) + 2\beta i\overline{\omega}}$$

$$= -\frac{f}{m} * \frac{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) + 2\beta i\overline{\omega}}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 - (2\beta i\overline{\omega})^2} = -\frac{f}{m} * \frac{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) + 2\beta i\overline{\omega}}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 - i^2(2\beta\overline{\omega})^2} = -\frac{f}{m} * \frac{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2) + 2\beta i\overline{\omega}}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}$$

$$= \left(-\frac{f}{m}\frac{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}\right) + \left(-\frac{f}{m} * \frac{2\beta\overline{\omega}}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}\right) i$$

Lösen der DGL (ii)

Da A eine komplexe Zahl ist, kann sie auch in der Form $A = |A|e^{i\bar{\varphi}}$ dargestellt werden
Dabei gilt für

- Der Maximalelogationsbetrag

$$|A| = \sqrt{\left(Re(A)\right)^2 + \left(Im(A)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{f}{m}\frac{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)}{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2}\right)^2 + \left(-\frac{f}{m} * \frac{2\beta\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2}\right)^2}$$

$$= \frac{f}{m}\sqrt{\frac{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2}{\left((\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2\right)^2} + \frac{(2\beta\bar{\omega})^2}{\left((\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2\right)^2}} = \frac{f}{m}\sqrt{\frac{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2}{\left((\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2\right)^2}}$$

$$= \frac{f}{m}\sqrt{\frac{1}{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)^2+(2\beta\bar{\omega})^2}} \qquad (2.191)$$

- Der Phasenwinkel $\bar{\varphi}$:

$$\tan(\bar{\varphi}) = \frac{Im(A)}{Re(A)} = \frac{\left(-\frac{f}{m} * \frac{2\beta\bar{\omega}}{\left(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2\right)^2+(2\beta\bar{\omega})^2}\right)}{\left(-\frac{f}{m}\frac{(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2)}{\left(\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2\right)^2+(2\beta\bar{\omega})^2}\right)} = \frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2-\omega_0{}^2} \qquad (2.193)$$

Lösen der DGL (iii)

Somit ergibt sich für die komplexe Zahl A:

$$A = |A|e^{i\overline{\varphi}} = \left[\frac{f}{m}\sqrt{\frac{1}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}}\right] * e^{i\left(\frac{2\beta\overline{\omega}}{\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2}\right)}$$

Daraus folgt dann die spezielle Lösung der Differentialgleichung (2.189) zu:

$$z_0(t) = A * e^{i\overline{\omega}t} = \left[\frac{f}{m}\sqrt{\frac{1}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}}\right] * e^{i\left(\frac{2\beta\overline{\omega}}{\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2}\right)} * e^{i\overline{\omega}t}$$

Natürlich muss für die komplette Lösung der Differentialgleichung auch die Lösung der homogenen Differentialgleichung betrachtet werden:

$$z_{inh}(t) = z_{hom}(t) + z_0(t)$$

Die homogene Differentialgleichung betrachtet das eigentliche unangeregte gedämpfte Schwingungssystem. Aufgrund der Dämpfung konvergiert jedoch die Amplitude und damit die Lösung der homogenen DGL gegen 0. Betrachtet man das komplette angeregte Schwingungssystem für Zeiten nach dem Einschwingvorgang, kann der Anteil der homogenen DGL $z_{hom}(t)$ vernachlässigt werden, sodass die inhomogene DGL (2.189) nur durch die spezielle Lösung $z_0(t)$ beschrieben werden kann.

Analyse der Lösung der DGL

$$z_0(t) = A * e^{i\overline{\omega}t} = \left[\frac{f}{m}\sqrt{\frac{1}{(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}}\right] * e^{i\left(\frac{2\beta\overline{\omega}}{\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2}\right)} * e^{i\overline{\omega}t}$$

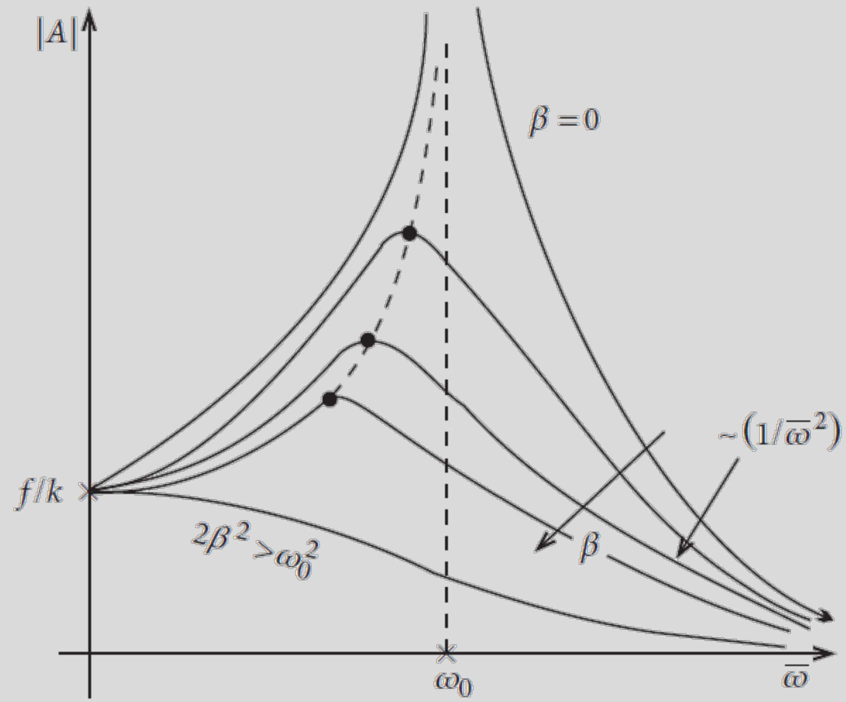
- **Die maximale Elogation :**

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{m}}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\left(\overline{\omega}^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + (2\beta\overline{\omega})^2}}$$

Besonders interessant ist hier der Fall einer fehlenden Dämpfung β. In diesem Fall konvergiert der Bruch unter der Wurzel ins Unendliche, wenn die Anregungsfrequenz $\overline{\omega}$ und die Eigenfrequenz ω_0 gleich sind . Dies bedeutet, dass die maximale Elogation unendlich groß ist. Man spricht dabei dann von der Resonanz-Katastrophe, weil das System mit immer größer werdender Amplitude schwingt, bis es sich selbst zerstört.

Um die Anregungsfrequenz für die maximale Amplitude bei einem gedämpften System zu ermitteln, muss die Funktion $|A|(\overline{\omega})$ auf Extrema untersucht werden:

$$\frac{d|A|}{d\overline{\omega}} = 0 \Rightarrow \overline{\omega} = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\beta^2}$$



Analyse der Lösung der DGL

$$z_0(t) = A * e^{i\varpi t} = \left[\frac{f}{m}\sqrt{\frac{1}{(\varpi^2-{\omega_0}^2)^2+(2\beta\varpi)^2}}\right] * e^{i\left(\frac{2\beta\varpi}{\varpi^2-{\omega_0}^2}\right)} * e^{i\varpi t}$$

- **Der Phasenwinkel:**

$$z_0(t) = A * e^{i\varpi t} = |A| * e^{i\left(\frac{2\beta\varpi}{\varpi^2-{\omega_0}^2}\right)} * e^{i\varpi t} = |A| * e^{i\left(\frac{2\beta\varpi}{\varpi^2-{\omega_0}^2}+\varpi t\right)}$$

Es zeigt sich an der Summe im Exponenten der e-Fkt (Vgl. Folie 3), dass die Funktion $z_0(t)$ ebenso wie die Anregungsfunktion mit der Frequenz ϖ schwingt, allerdings um den Winkel $\bar{\varphi} = \frac{2\beta\varpi}{\varpi^2-{\omega_0}^2}$ phasenverschoben ist.

Geht die Anregungsfrequenz ϖ gegen 0, zeigt das Schwingungssystem keine Resonanz, sondern bewegt sich mit der Anregung

Geht die Anregungsfrequenz ins Unendliche, führt das System Aufgrund der Impulserhaltung genau die Gegenbewegung aus

Liegt Resonanzfrequenz vor, existiert eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$