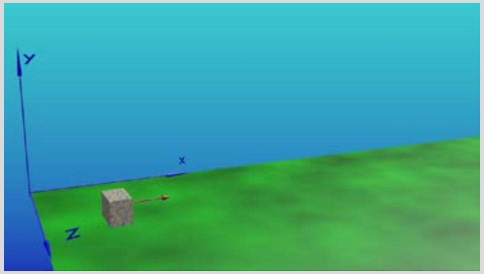
Der Kupplungsvorgang

Selbstlernmaterial
für das Fach „Kinematik“
im Studiengang „Fahrzeugtechnik“

Von Alexander Mick, Oktober 2014

Vergleich translatorische Bewegung und rotatorische Bewegung:
Weg/Geschwindigkeit vs. Winkel/Winkelgeschwindigkeit

translatorisch



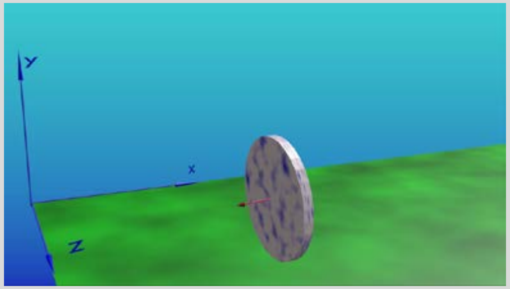
Bewegung in eine Richtung, Geschwindigkeitsvektor/ Beschleunigungsvektor zeigen in die Richtung der Bewegung

Zurückgelegter Weg: s

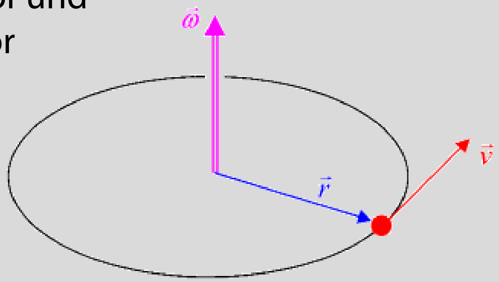
Geschwindigkeit: $v = \dot{s}$

Beschleunigung: $a = \dot{v} = \ddot{s}$

rotatorisch



Drehung auf einer Achse, Winkelgeschwindigkeitsvektor und Winkelbeschleunigungsvektor liegen auf der Drehachse



Zurückgelegter Drehwinkel : φ

Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$

Winkelbeschleunigung: $\vec{\alpha} = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}$

$$[\vec{\omega}] = \frac{rad}{s}$$

Zusammenhang Winkelgeschwindigkeit ω und Bahngeschwindigkeit v :

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Vergleich translatorische Bewegung und rotatorische Bewegung:
Masse vs. Trägheitsmoment

translatorisch

Für die translatorische Beschleunigung
ist die Massenverteilung irrelevant,
Sie ergibt sich aus der Summe der Einzelmassen
des Objektes

$$m_{ges} = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

rotatorisch

Bei der Winkelbeschleunigung α ist
für jede Einzelmasse m_i entscheidend,
welchen Abstand $r_{i,\perp}$ sie von der Drehachse besitzt:

Weiter entfernte Masse ist rotationsträger

Selbstversuch :
Setzen Sie sich auf einen Drehstuhl und halten Sie
in beiden ausgestreckten Händen schwere Bücher.
Versuchen Sie, sich mit dem Stuhl zu drehen.
stoppen Sie. Legen Sie nun die Bücher an den Körper und
drehen Sie mit dem Stuhl erneut

„Rotationsmasse" wird als Trägheitsmoment bezeichnet:

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i * {r_{i,\perp}}^2$$

Vergleich translatorische Bewegung und rotatorische Bewegung:
Kraft vs. Drehmoment

translatorisch

rotatorisch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = r * F_{\perp r}$$

Eine Kraft $\vec{F}$ bewirkt auf einen Körper der Masse m eine Beschleunigung $\vec{a}$ in Richtung der Kraft:

$$\vec{F} = m * \vec{a}$$

Damit ein Körper, an dem mehrere Kräfte wirken, nicht beschleunigt wird (seine Geschwindigkeit sich nicht ändert), muss die Summe aller anliegenden Kräfte $\vec{0}$ ergeben !! (Kräftegleichgewicht)

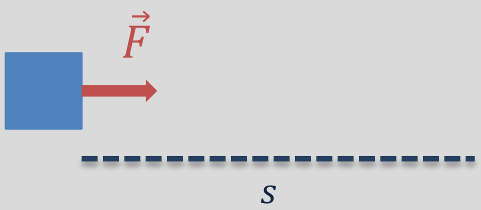
Ein Drehmoment $\vec{M}$ bewirkt auf einen Rotationskörper Der Trägheitsmasse J eine Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$:

$$\vec{M} = J * \vec{\alpha}$$

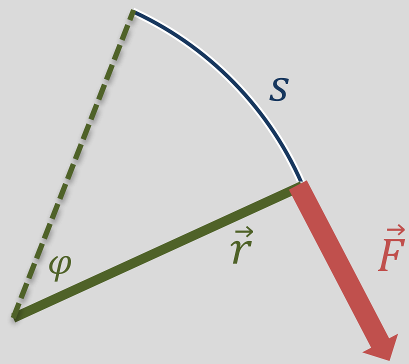
Damit ein Drehkörper, an dem mehrere Drehmomente wirken, nicht winkelbeschleunigt wird (seine Geschwindigkeit sich nicht ändert), muss die Summe aller anliegenden Drehmomente $\vec{0}$ ergeben !! (Drehmomentengleichgewicht)

Vergleich translatorische Bewegung und rotatorische Bewegung:
Arbeit/Leistung

translatorisch



rotatorisch



Eine **Kraft F** leistet über einen **Weg s** eine Arbeit E:

$$E = F * s$$

$$E = F_{\perp r} * s = F_{\perp r} * (\varphi * r) = F_{\perp r} * r * \varphi = M * \varphi$$

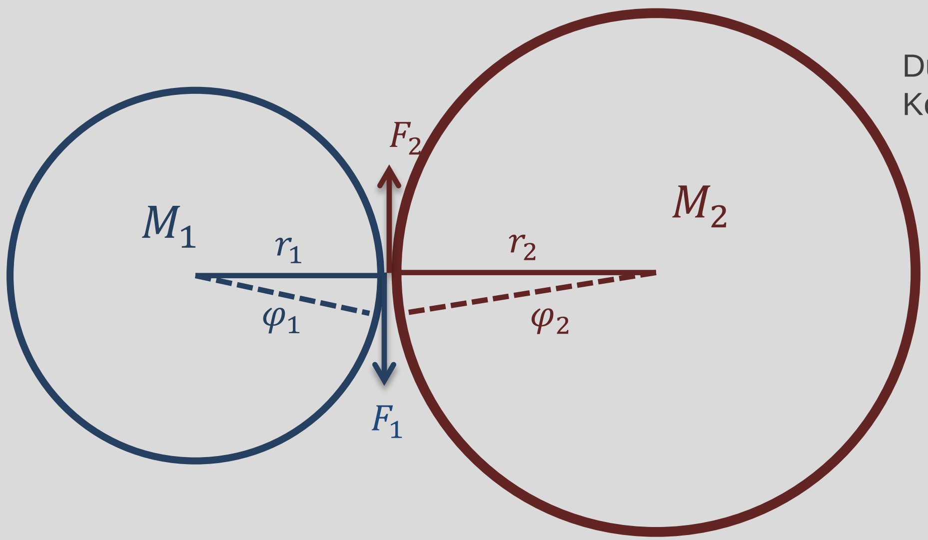
Energie dividiert durch die benötigte Zeit ergibt die Leistung:

$$\boxed{P = \frac{E}{t} = \frac{F * s}{t} = F * \frac{s}{t} = F * v}$$

Ein **Drehmoment $\vec{M}$** leistet bei der Rotation mit der **Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$** eine Leistung:

$$\boxed{P = \frac{d}{dt} E = M \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow P = M * \omega}$$

Übersetzungssysteme



Durch getriebeartige Systeme kann das Drehmoment auf Kosten der Winkelgeschwindigkeit vergrößert werden:

Im Berührpunkt gilt:

- 3. Newtonschen Gesetz (Actio = Reactio):
  $$F_1 = F_2$$
- Pro Zeiteinheit wird auf beiden Rädern der gleiche Weg abgerollt: $s_1 = s_2$
- Kraft steht senkrecht zum Hebelarm

Betrachtung der Drehmomente:

$$M_1 = F_1 * r_1$$
$$M_2 = F_2 * r_2$$

$$mit\ F_1 = F_2$$

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2} \Rightarrow \boxed{M_2 = M_1 * \frac{r_2}{r_1} = M_1 * i}$$

Man kann das Drehmoment M_1 verstärken !!

$$\boxed{\text{Übersetzungsverhältnis } i = \frac{r_2}{r_1} > 1}$$

Betrachtung der Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{s_1}{r_1} = \varphi_1$$
$$\frac{s_2}{r_2} = \varphi_2$$

$$mit \quad s_1 = s_2$$

$$\varphi_1 * r_1 = \varphi_2 * r_2 \quad \Leftrightarrow \varphi_2 = \varphi_1 * \frac{r_1}{r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\varphi_2) = \frac{d}{dt}\left(\varphi_1 * \frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} * \frac{d}{dt}(\varphi_1) \quad \boxed{\Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} * \omega_1 = \frac{\omega_1}{i}}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_1 wird verringert !!

Vergleich translatorische Bewegung und rotatorische Bewegung:

Impulse vs. Drehimpuls (Drall)

translatorisch

Die „Wucht" eines Körpers wird durch den Impuls beschrieben Er ergibt sich aus Masse und Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m * \vec{v}$$

Um den Impuls zu ändern, bedarf es einer Kraft (Newton 2). Die Kraft beschreibt die Änderungsrate des Impulses:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Bei **konstanter** Masse (m=const):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m * \vec{v})}{dt} = m * \frac{d\vec{v}}{dt} = m * \vec{a}$$

rotatorisch

Die „Drehwucht" eines Körpers wird durch Den Drehimpuls beschrieben Er ergibt sich aus Dem Trägheitsmoment und der Winkelgeschwindigkeit:

$$\vec{L} = J * \vec{\omega}$$

Um den Drehimpuls zu ändern, ist ein Drehmoment Erforderlich. Das Drehmoment beschreibt die Änderungsrate des Drehimpulses:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

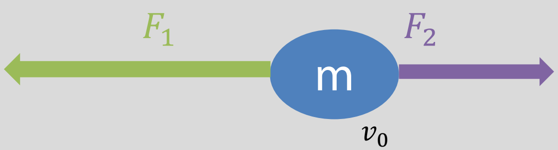
Bei **konstantem** Trägheitsmoment (J=const):

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(J * \vec{\omega}) = J * \frac{d}{dt}(\vec{\omega}) = J * \vec{\alpha}$$

Vergleich translatorische Bewegung und rotatorische Bewegung:

Impulssatz vs. Drallsatz

translatorisch



Gemäß der Definition der Kraft (zeitliche Ableitung des Impulses) kann eine Gleichung über die Änderung des Impulses aufgestellt werden:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m * v) = m * \frac{dv}{dt} = m * a$$

Neben der Möglichkeit der Berechnung der Beschleunigung kann diese Gleichung auch durch Integration gelöst werden:

$$F_1 + F_2 = m * \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(F_1 + F_2)}{m}\right) dt = dv \quad \Rightarrow \frac{1}{m}\int_{t_o}^{t} (F_1 + F_2) dt = \int_{v_0}^{v} dv$$

$$\Rightarrow \frac{(F_1 + F_2)}{m} * (t - t_0) = (v - v_0)$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{(F_1 + F_2)}{m} * (t - t_0) + v_0$$

rotatorisch

Gemäß der Definition des Drehmomentes (zeitliche Ableitung des Dralles) kann eine Gleichung über die Änderung des Dralles aufgestellt werden:

$$M = M_1 + M_2 = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(J * \omega) = J * \frac{d\omega}{dt} = J * \alpha$$

Neben der Möglichkeit der Berechnung der Winkelbeschleunigung kann diese Gleichung auch durch Integration gelöst werden:

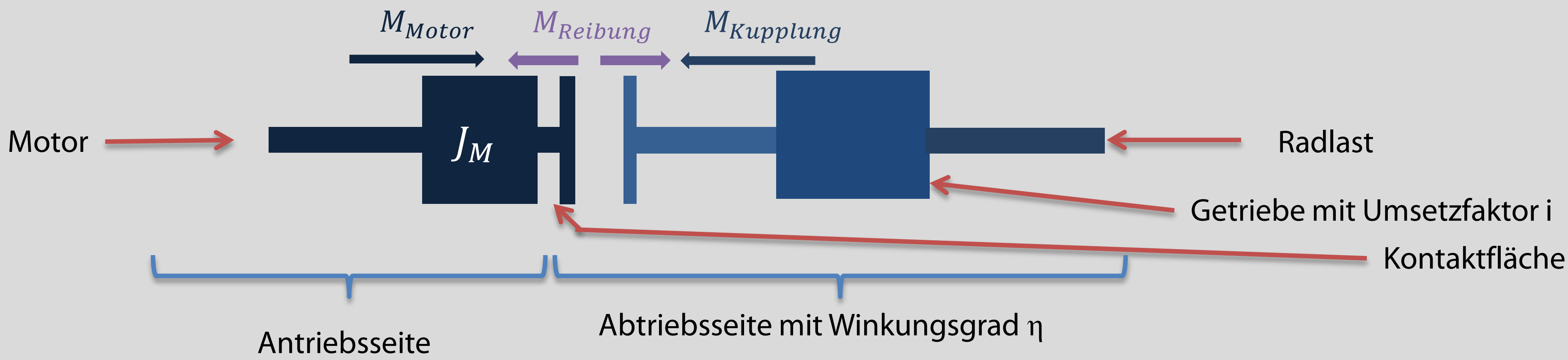
$$M_1 + M_2 = J * \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(M_1 + M_2)}{J}\right) dt = d\omega \Rightarrow \frac{1}{J}\int_{t_o}^{t} (M_1 + M_2) dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{(M_1 + M_2)}{J} * (t - t_0) = (\omega - \omega_0)$$

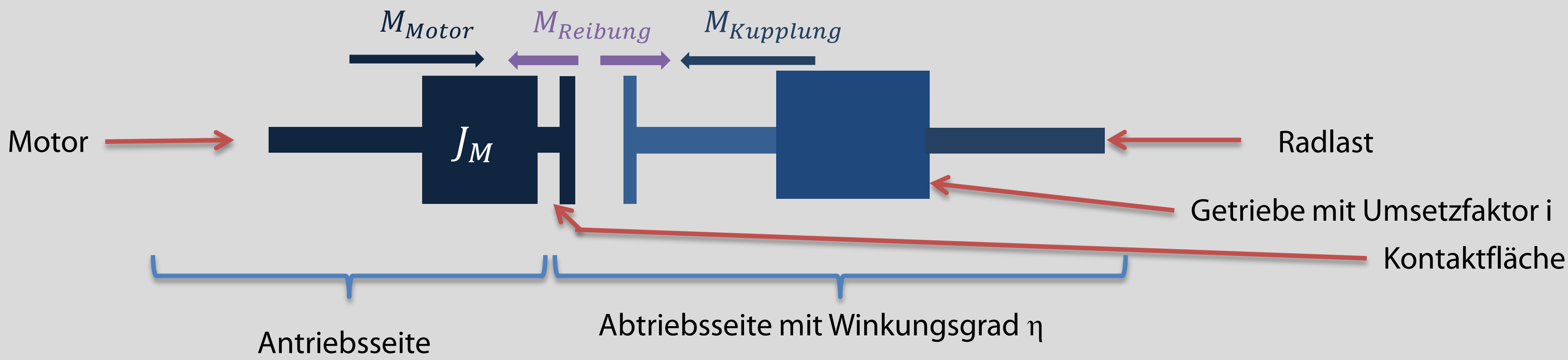
$$\rightarrow \omega(t) = \frac{(M_1 + M_2)}{J} * (t - t_0) + \omega_0$$

Kupplung: einfache Betrachtung (stetige Bewegung)



- Einfaches Modell:
- Das Fahrzeug soll sich stetig bewegen, also nicht beschleunigen. D. h. der Antriebsstrang soll nicht winkelbeschleunigt werden. Aus diesem Grund müssen gemäß des Drallsatzes an der Kupplungsseite des Antriebsstrangs die Drehmomente der Reibung ($M_{Reibung}$) und der übersetzten Radlast ($M_{Kupplung}$)gleich groß sein.

Einfache Kupplung: Drehmoment der Kupplung



- Auf dem Rad mit dem Radius r_{rad} wirkt die Kraft F_{rad} und dadurch die das Drehmoment $M_{Last} = r_{rad} * F_{rad}$
- Die Winkelgeschwindigkeit der Radachse berechnet sich gemäß: $\omega_{rad} = 2\pi \frac{U_{Rad}}{v_{Fzg}}$
- Das Getriebe wandelt Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit mit dem Faktor i:

$$M_{Getriebeingang} = \frac{M_{Last}}{i} \quad \text{und} \quad \omega_{Kupplung} = \omega_{Getriebeingang} = \omega_{Last} * i$$

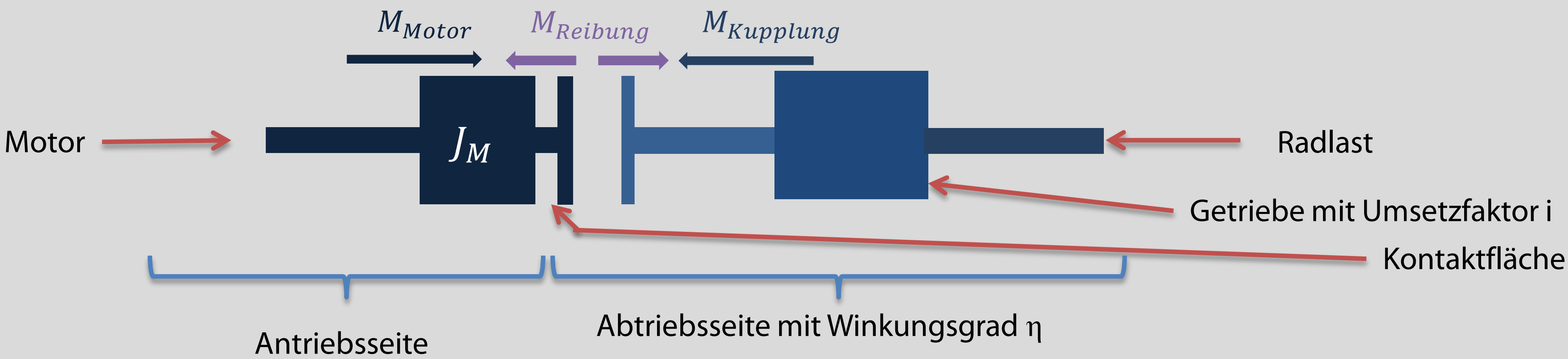
- Gleichzeitig gibt es Verlust durch den Wirkungsgrad:

$$M_{Kupplung} = \frac{M_{Getriebeingang}}{\eta}$$

Da sich an der Reibefläche die Drehmomente von Reibung und Kupplung gegenüberstehen, der Antriebsstrang aber nicht winkelbeschleunigt wird, müssen sie gleich groß sein !!

$$M_{Reibung} = M_{Kupplung}$$

Einfache Kupplung: Einwirkung auf den Motor



- Auf der Motorseite stehen sich die Drehmomente der Reibung und des Motors gegenüber, wirken beide auf das Trägheitsmoment des Motors. **Es gilt der Drallsatz:**

$$\boxed{M_{gesamt} = M_{Motor} + (-M_{Reibung}) = \frac{dL_{Motor}}{dt} = \frac{d}{dt}(J_{Motor} * \omega_{Motor}) = J_{Motor} * \frac{d\omega_{Motor}}{dt} = J_{Motor} * \alpha_{Motor}}$$

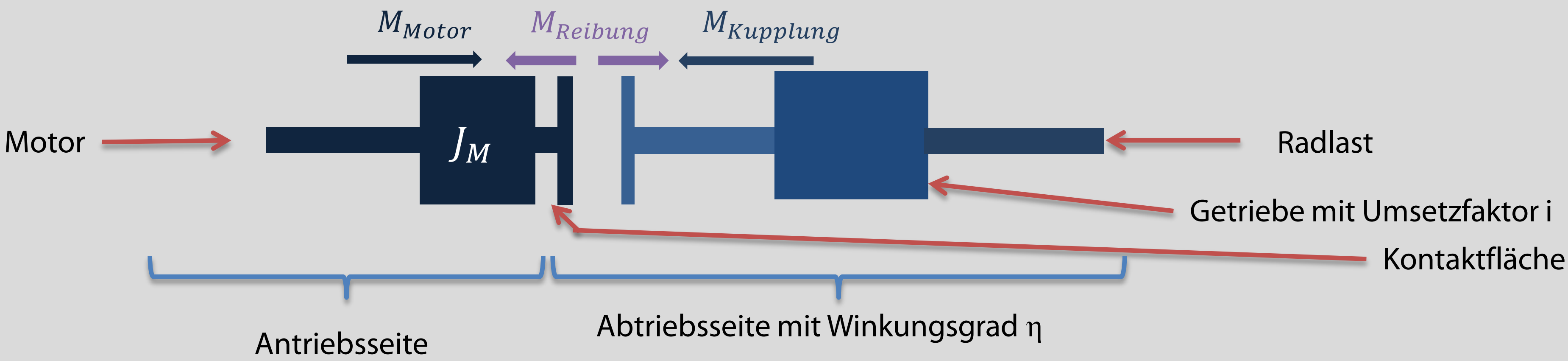
Ist das Drehmoment der Reibung größer als das Drehmoment des Motors, erfährt die Motorseite mit dem Trägheitsmoment J_{Motor} eine negative Winkelbeschleunigung α_{Motor} und wird dadurch während des Reibens langsamer bis er die Winkelgeschwindigkeit der Kupplung angenommen hat

$$\omega_{Motor} = \omega_{Motor,0} + \alpha_{Motor} * t \qquad mit \quad \alpha_{Motor} = \frac{(-M_{Motor}) + M_{Reibung}}{J_{Motor}}$$

Daraus ergibt sich die Kupplungszeit:

$$t = \frac{\omega_{Kupplung} - \omega_{Motor,0}}{\alpha_{Motor}}$$

Einfache Kupplung: Einwirkung auf den Motor



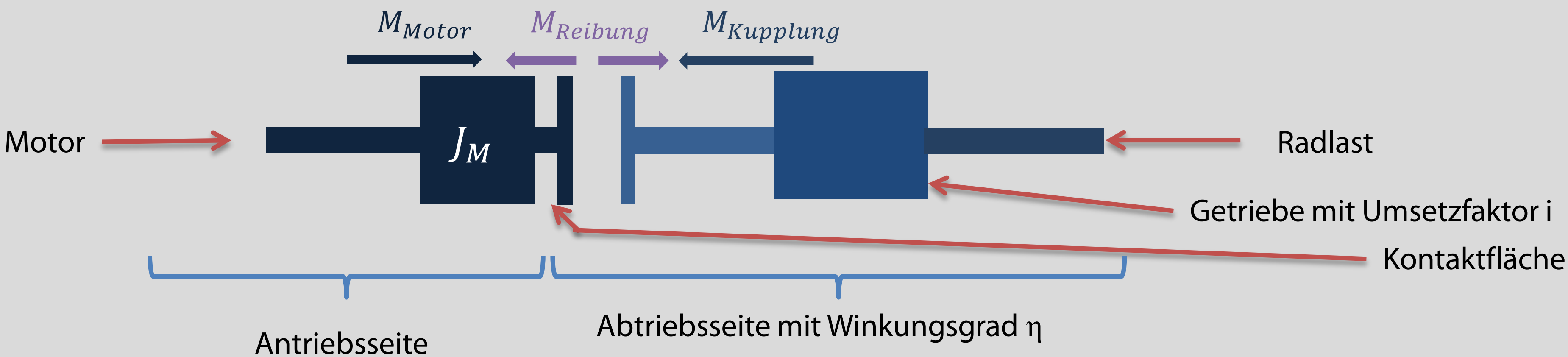
- Auf der Motorseite stehen sich die Drehmomente der Reibung und des Motors gegenüber, wirken beide auf das Trägheitsmoment des Motors. **Es gilt der Drallsatz:**

$$M_{gesamt} = M_{Motor} + (-M_{Reibung}) = \frac{dL_{Motor}}{dt} = \frac{d}{dt}(J_{Motor} * \omega_{Motor}) = J_{Motor} * \frac{d\omega_{Motor}}{dt} = J_{Motor} * \alpha_{Motor}$$

Durch Lösen der Differentialgleichung (siehe Seite 7) ergibt sich für die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_{Motor}(t) = \frac{M_{Motor} + (-M_{Reibung})}{J_{Motor}} * (t - t_0) + \omega_{Motor,0}$$

Einfache Kupplung: Verlust durch Reibung



- Auf der Reibefläche rotiert der Motor mit der relativen Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega = \omega_{Motor} - \omega_{Kupplung}$
- Somit wird mit folgender Leistung Energie in Wärme umgewandelt:
- $P_{Verlust} = M_{Reibung} * \Delta\omega$

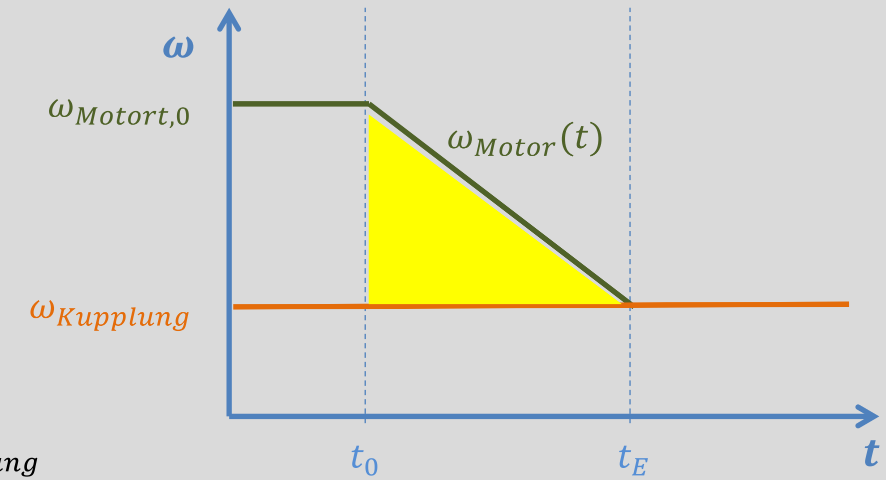
$$\Rightarrow E_{Verlust} = \int P_{Verlust} * dt = \int_{t_0}^{t_e} M_{Reibung} * \Delta\omega(\mathrm{t}) \; * dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_e} (M_{Reibung} * (\omega_{Motor}(\mathrm{t}) - \omega_{Kupplung})) \; * dt$$

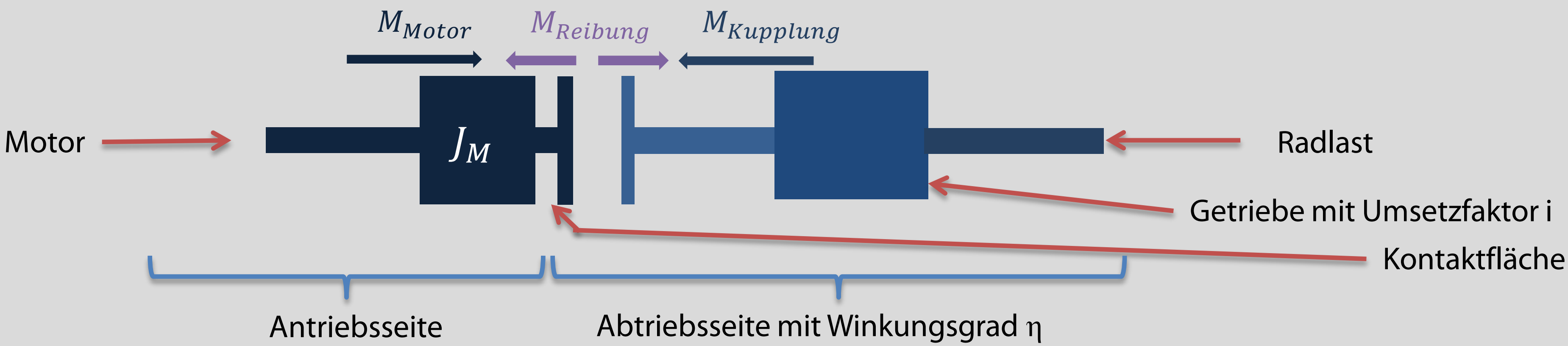
$$= M_{Reibung} * = \int_{t_0}^{t_e} (\omega_{Motor}(\mathrm{t}) - \omega_{Kupplung}) \; * dt$$

Dieses Integral entspricht im nebenstehendem Diagramm der gelben Fläche und der Energieverlust berechnet sich zu:

$$E_{Verlust} = \frac{(\omega_{Motor,0} - \omega_{Kupplung,0})(t_E - t_0)}{2} * M_{Reibung}$$



Einfache Kupplung: Rechenwerte



$M_{Kupplung} = M_{Reibung} = 220{,}3\ Nm$

$W_{Verlust\ am\ Antriebsstrang} = 3145{,}3\ J$

$W_{Reibung} = 314{,}5\ J$

Reibezeit: 0,26 s

Vorraussetzung:

- Fahrzeuggeschwindigkeit: 120 km/h
- Reifenradius: 31 cm
- Antriebskraft: 2200 N
- Umsetzung Getriebe: i $= 3{,}6$
- Wirkungsgrad: $\eta = 0{,}86$
- Anfängliche Umdrehungszahl des Motors: 3800 U/min
- Trägheitsmoment des Motors: $0{,}25\ kgm^2$
- Drehmoment des Motors: 210 Nm